指で数えて曜日を当てる方法

作成日：2004 年 12 月 06 日
更新日：2009 年 02 月 06 日

鈴木健太郎

目次

指で数えて曜日を当てる方法

はじめに

私は中学を登校拒否してその後ひきこもりました．そして約 10 年が過ぎた 2002 年のある日のことです．私は風邪気味で寝込んでいたのですが，ふと昔父から教わった指で数えて曜日を当てる方法について考えていました. それは与えられた西暦の日付に対し指で数えて曜日を求める方法のことで，左手の人差し指，中指，薬指にある関節で区切られた部分のうち 7 つに週の各曜日を当てはめて, 各部を親指で押さえながら曜日が分かる日付から日付を数えていきます．“指カレンダー[1]”などの名で知られる従来の方法は，1 月 1 日の曜日を知っていることを条件に，同年内の日付に対し曜日を求めることができました. しかしその 1 月 1 日の曜日はカレンダーか何かで事前に調べておく必要があります．私は“サヴァン症候群[2]”の人々をテレビなどで見て知っていたので，なんとかこの 1 月 1 日の曜日を求める方法がないかと考えました．始めは「20 世紀中の（日付に対して）曜日が分かればいいなぁ」ぐらいに思っていたのですが，当初の予想を超えて 20 世紀はおろか 21 世紀だろうがまたは 19 世紀だろうが何世紀だろうが分かってしまうような全く新しい方法を発見したのです. その時私はあまり驚かなかったのですが，その後何度も恐怖で震えることになります.

新しい方法は，西暦 1601 年 1 月 1 日以降の任意の日付に対して，一定時間（約 10 秒）で曜日を回答できます．一定時間とはつまり与えられた日付に対しカウント回数が約 30 回の最大値を超えない[3]ので，1 秒で 1 カウントできるとして最悪 30 秒ぐらいしか掛からないという意味です．なお 10 秒[4]とは平均回答時間の目安です．実際に使ってみると，数えるときに色々判断したり計算したりする必要があり，はじめはこれでかなり遅いはずです．しかし何度も同じ道を通っていると道順を覚えてしまうように，練習すれば次第に計算が記憶へシフトし，信じられないほど速くなります．また暗算も可能に

---

[1] 呼び名は色々とある．また内容についても本書で紹介したものだけでなく多種あるようだ．起源などについては不明.

[2] 映画『レインマン』などで有名．自閉症などの障害がありながら，(おそらくは障害に起因する)天才的能力を示すこと．日付の曜日を当てるといったカレンダー能力の他に様々な能力がある.

[3] カウント回数が最大になるのは 1980 年 9 月 28 日(日)などで 32 回.

[4] 実験やカウント回数の平均が根拠で，あくまでだいたいの目安．カウント回数の平均(1601 年 1 月 1 日から 11600 年 12 月 31 日まで)は約 18.55 回だった.

なります．私は新しい方法を練習し完全にマスターしました．今では 1601 年 1 月 1 日から 11600 年 12 月 31 日までの日付に対し 3〜4 秒で曜日を回答できます[5]．したがってこのように誰でもサヴァン症候群のカレンダー能力を獲得できると思います．とにかく物凄い能力なので皆さんもぜひ挑戦してください．きっと驚くと思います．

西暦の日付に関する注意

本書では，従来の方法あるいは新しい方法を使って，西暦 1601 年 1 月 1 日以降の日付に対し曜日を求めます．ただしその際，1582 年 10 月 15 日からはグレゴリオ暦[6]が使われたと仮定します．

[5] デフォルトではなく最適化(自分用に改造)したものを使っている．上述のように新しい方法を何度も使い込むうちに自然な形で得られた．

[6] 現在事実上の世界標準となった暦で，1582 年 10 月 15 日から一部の国々が使い出した．あらかじめ決めた年に閏日を挿入することで，ある期間公転周期と暦の 1 年を平均で近づける．誤差は約 3300 年で 1 日．

指で数えて曜日を当てる方法

第１章　従来の方法

西暦 1601 年 1 月 1 日以降の任意の日付を Y 年 M 月 D 日とします．以下では，従来の方法を使って Y 年 M 月 D 日の曜日を求めることにします．ただしそのためには

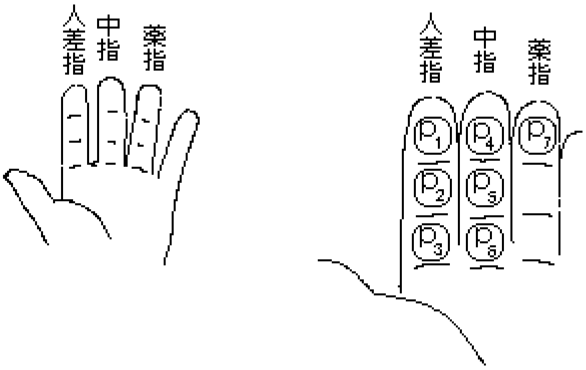
1.　Y 年 1 月 1 日の曜日が分かる．
2.　Y 年が平年か閏年か分かる．

ことが必要です. 例として 2005 年 7 月 19 日の曜日を求めます. なお日付 a に対して，a の n 日後とは a から n 日経過した日付を指します.

【従来の方法】

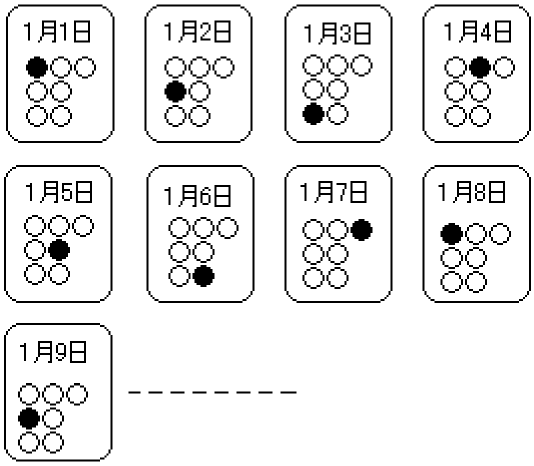
Step1.

左手の人差し指，中指，薬指にある関節で区切られた部分のうち 7 つを使います．人差し指先からp_1，p_2，p_3，中指先からp_4，p_5，p_6，薬指先はp_7として，今から各部にそれぞれ週の各曜日を当てはめて，親指で押さえながら日付を数えていきます.

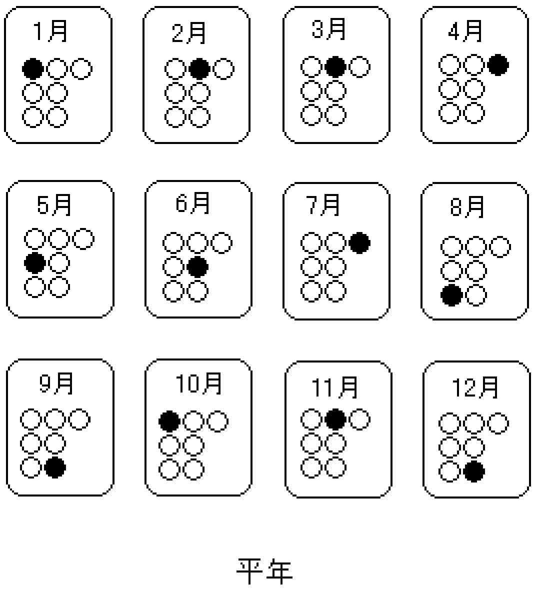


Step2.

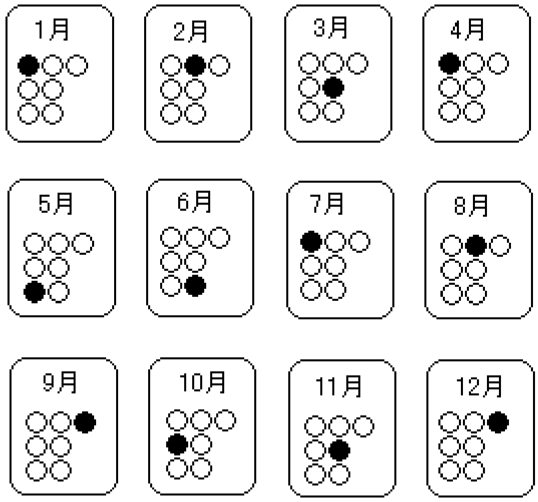
Y 年 1 月 1 日から 1 月 1 日(p_1)，　1 月 2 日(p_2)，1 月 3 日(p_3)，1 月 4 日(p_4)，1 月 5 日(p_5)，1 月 6 日(p_6)，1 月 7 日(p_7)，1 月 8 日(p_1)，・・・と数えていくと，



1 月から 12 月までの各月 1 日は$p_1, p_2, \cdots, p_7$のどれかに埋まるはずです．そしてそれは Y 年が平年か閏年かの 2 通りしかありません．



平年

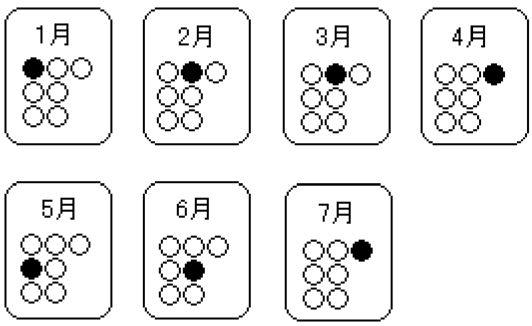


閏年

各月 1 日の位置

そこでこの各月 1 日の位置を「1 月(p_1)，2 月(p_4)，・・・，12 月(p_6)」というように何度も反復して覚えてしまいます．

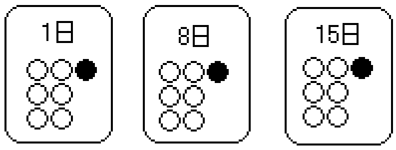
では各月 1 日の位置を覚えたとして，M 月まで数えてみます．2005 年は平年なので，1 月(p_1)，2 月(p_4)，3 月(p_4)，4 月(p_7)，5 月(p_2)，6 月(p_5)，7 月(p_7)．



指で数えて曜日を当てる方法

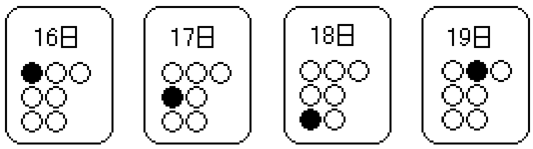
Step3.

1 日の位置が分かったら，次に 7 日ずつ数えて D 日に近づきます．7 日後の 8 日，さらに 7 日後の 15 日など, 1 日, 8 日, 15 日, 22 日, 29 日は同じ曜日になるので, 1 日(p_7), 8 日(p_7)，15 日(p_7).



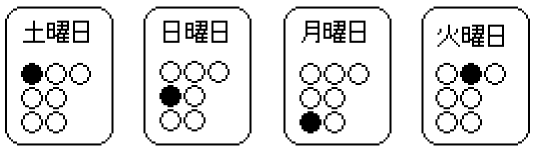
Step4.

最後に D 日まで 1 日ずつ数えたら，16 日(p_1)，17 日(p_2)，18 日(p_3)，19 日(p_4).



Step5.

その位置までp_1から曜日を数えて終わります．例の 2005 年 1 月 1 日は土曜日なので, 土曜日(p_1)，日曜日(p_2)，月曜日(p_3)，火曜日(p_4).



(手続き終了)

第 2 章　新しい方法

西暦 1601 年 1 月 1 日以降の任意の日付を Y 年 M 月 D 日とします．以下では，新しい方法を使って Y 年 M 月 D 日の曜日を求めることにします．新しい方法は，従来と同じ 7 つの部分に週の各曜日を当てはめて，各部を親指で押さえながら曜日が分かる日付から日付を数えていきます．日付を数えるときは年月日のうち 2 つを固定します．つまり始点の y 年 1 月 1 日から, 月と日がそれぞれ 1 月, 1 日である日付を次々数えていって，まずは Y 年 1 月 1 日の曜日を求めます[7]．このとき 1601 年 1 月 1 日(p_1)，1701 年 1 月 1 日(p_6)，1801 年 1 月 1 日(p_4)，・・・とわざわざ数えないで，1601 年(p_1)，1701 年(p_6)，1801 年(p_4)，・・・というように月と日は省略して日付の年だけ数えるようにします．同様に Y 年 1 月 1 日から月を数えて Y 年 M 月 1 日の曜日を求めたら，最後に日を数えて Y 年 M 月 D 日の曜日を求めます．

例）　2000 年 12 月 31 日

「1601 年」01 月　01 日　(p_1),
「1701 年」01 月　01 日　(p_6),
「1801 年」01 月　01 日　(p_4),
「1901 年」01 月　01 日　(p_2),
「1941 年」01 月　01 日　(p_3),
「1981 年」01 月　01 日　(p_4),
「1989 年」01 月　01 日　(p_7),
「1997 年」01 月　01 日　(p_3),
「1998 年」01 月　01 日　(p_4),
「1999 年」01 月　01 日　(p_5),
「2000 年」01 月　01 日　(p_6),
　2000 年「01 月」01 日　(p_6),
　2000 年「10 月」01 日　(p_7),
　2000 年「11 月」01 日　(p_3),
　2000 年「12 月」01 日　(p_5),
　2000 年　12 月「01 日」(p_5),
　2000 年　12 月「08 日」(p_5),
　2000 年　12 月「15 日」(p_5),
　2000 年　12 月「22 日」(p_5),
　2000 年　12 月「29 日」(p_5),

[7] 正確に言えばこの時点で分かっているのは曜日の“位置”だけ．しかし敢えてこう表現する．後も同じ．

指で数えて曜日を当てる方法

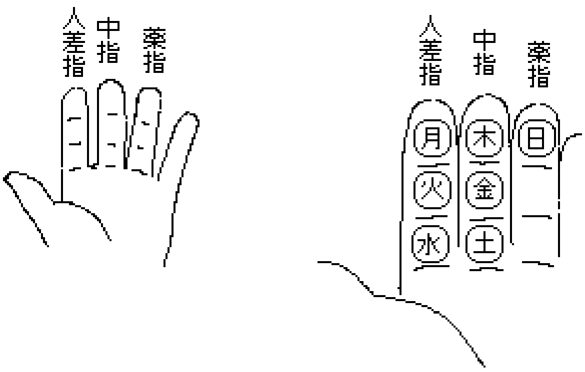
2000 年　12 月「30 日」(p_6),
2000 年　12 月「31 日」(p_7),

また，序文でも述べたとおりこのとき Y 年 M 月 D 日に対して一定時間（約 10 秒）で曜日を求めることができます．では例として 2000 年 12 月 31 日の曜日を求めます．なお a 年 1 月 1 日の n 年後とは$a+n$年 1 月 1 日を指します．(※)が付いた処理は前提条件が真の間繰り返してください．

【新しい方法】

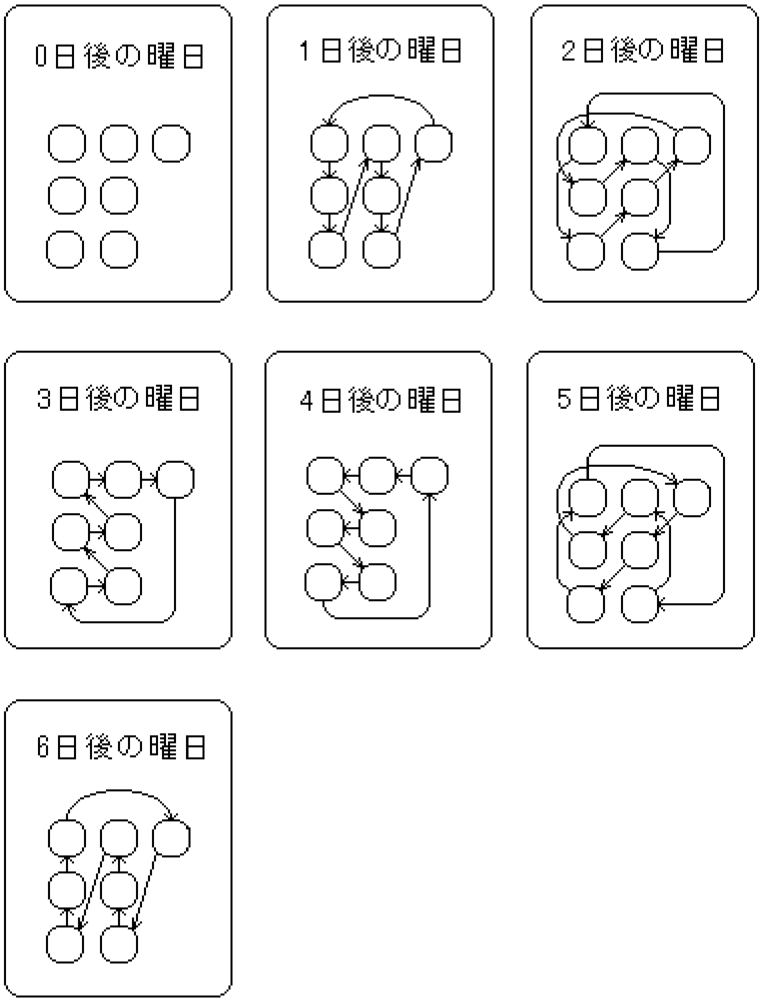
Step1.

従来と同じ 7 つの部分に週の各曜日を当てはめます．月曜日(p_1)，火曜日(p_2)，・・・，日曜日(p_7).



以下では，日付 a が各部の曜日のとき，$0,1,2,\cdots,6$日後の曜日がどこにあるかを位置関係で判断する必要があります．詳しくは解説ブログの記事を参照してください．

指で数えて曜日を当てる方法

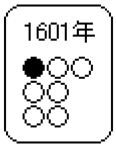


曜日の位置関係

では各部を親指で押さえながら日付を数えていきます.

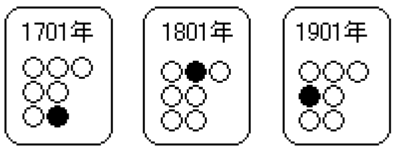
Step2.

Y 以下で最大の 400 で割ると 1 余る年の 1 月 1 日は月曜日なので，p_1を押さえて Y 以下で最大の 400 で割ると 1 余る年を数えます．1601 年(p_1).



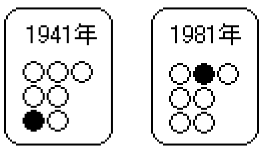
Step3.

100 年後の年が Y を超えないなら, このとき 100 年後は 5 日後と同じ曜日になるので, 5 日後の曜日部分を押さえて 100 年後の年を数えます(※). 1701 年(p_6), 1801 年(p_4), 1901 年(p_2).



Step4.

40 年後の年が Y を超えないなら，このとき 40 年後は 1 日後と同じ曜日になるので，1 日後の曜日部分を押さえて 40 年後の年を数えます(※). 1941 年(p_3)，1981 年(p_4).

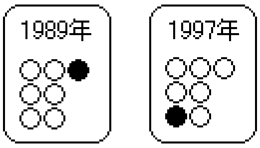


Step5.

20 年後の年が Y を超えないなら，このとき 20 年後は 4 日後と同じ曜日になるので，4 日後の曜日部分を押さえて 20 年後の年を数えます(※).

Step6.

8 年後の年が Y を超えないなら，このとき 8 年後は 3 日後と同じ曜日になるので，3 日後の曜日部分を押さえて 8 年後の年を数えます(※). 1989 年(p_7)，1997 年(p_3).



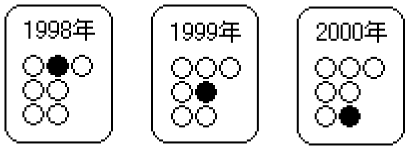
Step7.

4 年後の年が Y を超えないなら，このとき 4 年後は 5 日後と同じ曜日になるので，5 日後の曜日部分を押さえて 4 年後の年を数えます(※).

Step8.

1 年後の年が Y を超えないなら，このとき 1 年後は 1 日後と同じ曜日になるので，1 日後の曜日部分を押さえて 1 年後の年を数えます(※). 1998 年(p_4)，1999 年(p_5)，2000 年(p_6).

指で数えて曜日を当てる方法



Step9.

Y 年が平年か閏年かを判断します.

1601 年以降の各年は,

1. 4 で割り切れないなら平年.
2. 4 で割り切れて 100 で割り切れないなら閏年.
3. 100 で割り切れて 400 で割り切れないなら平年.
4. 400 で割り切れるなら閏年.

なので，よって 2000 年は閏年になります.

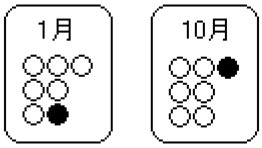
Step10.

平年の各月 1 日は，4,7 月が 1 月の 6 日後と同じ曜日，10 月が 1 月の 0 日後と同じ曜日，5 月が 1 月の 1 日後と同じ曜日になります.

閏年の各月 1 日は，4,7 月が 1 月の 0 日後と同じ曜日，10 月が 1 月の 1 日後と同じ曜日になります.

そこで 1 月の次にこれらの月を数えて M 月に近づきます．1 月(p_6)，10 月(p_7).

指で数えて曜日を当てる方法



Step11.

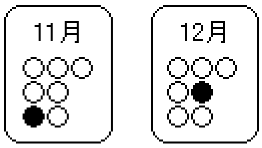
M 月まで 1 月ずつ数えます．各月 1 日から翌月 1 日までの経過日数は，各月の日数と等しくなります. 例えば 1 月は 31 日まであるので 1 月 1 日の 31 日後が 2 月 1 日です.

1 月	2 月		3 月	4 月	5 月	6 月
31	28	29	31	30	31	30

7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
31	31	30	31	30	31

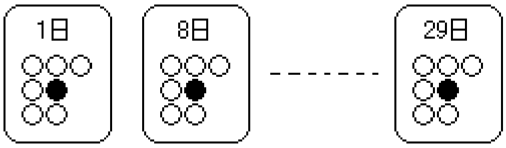
各月の日数

31 日後と 3 日後，30 日後と 2 日後，29 日後と 1 日後，28 日後と 0 日後はそれぞれ同じ曜日なので，11 月(p_3)，12 月(p_5).



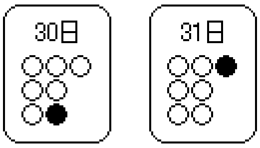
Step12.

1 日から 7 日ずつ数えて D 日に近づきます．1 日(p_5)，8 日(p_5)，・・・，29 日(p_5).



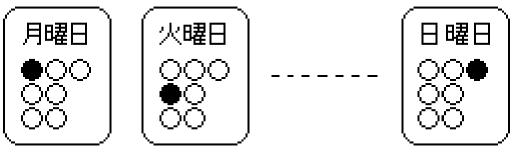
Step13.

D 日まで 1 日ずつ数えます．30 日(p_6)，31 日(p_7).



Step14.

その位置までp_1から曜日を数えて終わります．月曜日(p_1)，火曜日(p_2)，・・・，日曜日(p_7).



(手続き終了)

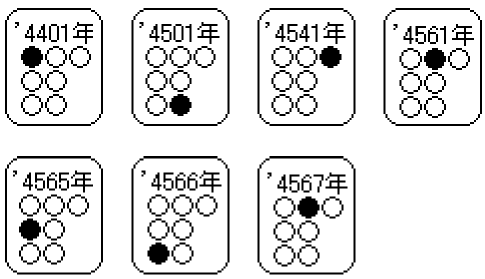
第 3 章　例題を解く

では新しい方法を使っていくつか例題を解いてみます．出題はすべて西暦 1601 年 1 月 1 日以降の日付とします. なお各問について与えられた日付をＹ年Ｍ月Ｄ日とします. また日付の年は下 4 桁だけ残して省略して書くことにします.

例）　1234567 年→'4567 年

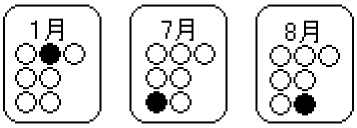
例題 1.　'4567 年 8 月 9 日

まず年を数える．Ｙ以下で最大の 400 で割ると 1 余る年は'4401 年だから，p_1を押さえて'4401 年(p_1)．次に 100 年後の年はＹを超えないので 5 日後の曜日部分p_6を押さえて'4501 年(p_6)．さらに 100 年後の年はＹを超えるからもう数えずに先へ進み，次に 40 年後の年はＹを超えないので 1 日後の曜日部分p_7を押さえて'4541 年(p_7)．さらに 40 年後の年はＹを超えるのでもう数えずに先へ進み, 次に 20 年後の年はＹを超えないので，・・・と以下同様に'4561 年(p_4)，'4565 年(p_2)，'4566 年(p_3)，'4567 年(p_4)．これでＹ年 1 月 1 日の曜日が分かった.

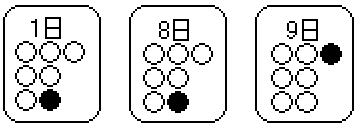


次に月を数える．まずＹ年が平年か閏年かを判断する．'4567 年は平年．平年の 7 月 1 日は，1 月 1 日の 6 日後と同じ曜日である．1 月(p_4)から，6 日後の曜日部分p_3を押さえて 7 月(p_3)．次に 1 月ずつ数える．8 月 1 日は 7 月 1 日の 31 日後だから，3 日後の曜日部分p_6を押さえて 8 月(p_6)．これでＹ年Ｍ月 1 日の曜日が分かった.

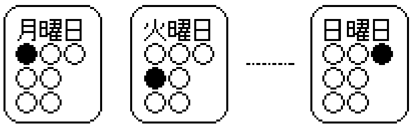
指で数えて曜日を当てる方法



最後に日を数える．7 日後は 0 日後と同じ曜日になるので，1 日(p_6)，8 日(p_6)．1 日ずつ数えて 9 日(p_7)．これで Y 年 M 月 D 日の曜日が分かった．



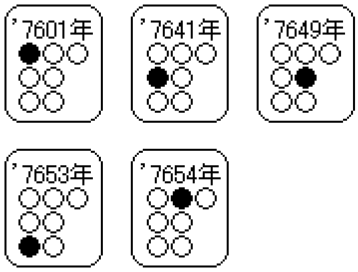
後はその位置までp_1から曜日を数えたら終り．月曜日(p_1)，火曜日(p_2)，・・・，日曜日(p_7)．よって’4567 年 8 月 9 日は日曜日．



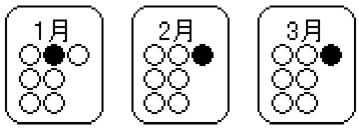
例題 2.　’7654 年 3 月 21 日

まず年を数える．Y 以下で最大の 400 で割ると 1 余る年は’7601 年だから，p_1を押さえて’7601 年(p_1)．100 年後の年は Y を超えるので数えない．しかし 40 年後の年は Y を超えないから 1 日後の曜日部分p_2を押さえて，’7641 年(p_2)．さらに 40 年後の年は Y を超えるので数えずに進み，20 年後の年も Y を超えるので数えずに進み，しかし 8 年後の年は Y を超えないので 3 日後の曜日部分p_5を押さえて，’7649 年(p_5)．さらに 8 年後の年は Y を超えるから数えずに・・・と以下同様に進む．’7653 年(p_3)，’7654 年(p_4)．これで Y 年 1 月 1 日の曜日が分かった．

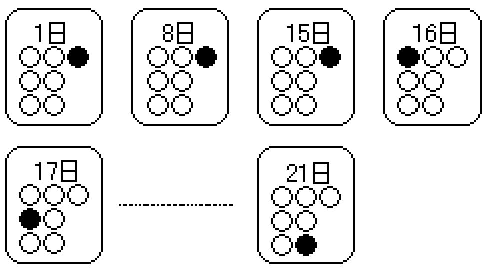
指で数えて曜日を当てる方法



次に月を数える．まず Y 年が平年か閏年かを判断する．'7654 年は平年．次に 1 月(p_4)から 1 月ずつ数える．2 月 1 日は 1 月 1 日の 31 日後だから 3 日後の曜日部分p_7を押さえて 2 月(p_7)．平年の場合 3 月 1 日は 2 月 1 日の 28 日後だから 0 日後の曜日部分p_7を押さえて，3 月(p_7)．これで Y 年 M 月 1 日の曜日が分かった．

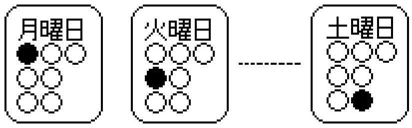


最後に日を数える．7 日後は 0 日後と同じ曜日だから 1 日(p_7)，8 日(p_7)，15 日(p_7)．1 日ずつ数えて 16 日(p_1)，17 日(p_2)，・・・，21 日(p_6)．これで Y 年 M 月 D 日の曜日が分かった．



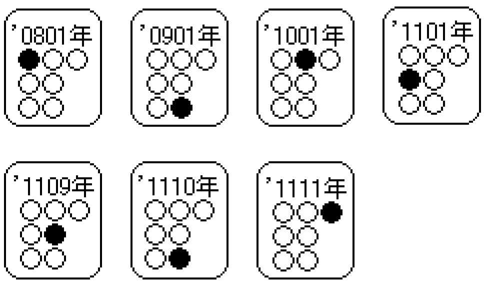
後はその位置までp_1から曜日を数えて終わり．月曜日(p_1)，火曜日(p_2)，・・・，土曜日(p_6)．よって'7654 年 3 月 21 日は土曜日．

指で数えて曜日を当てる方法

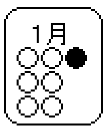


例題 3.　'1111 年 1 月 1 日

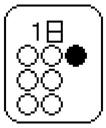
まず年を数える．Y 以下で最大の 400 で割ると 1 余る年は'0801 年だから，p_1を押さえて'0801 年(p_1). 次に 100 年ずつ数える. 5 日後の曜日部分p_6を押さえて, '0901 年(p_6). 同じく'1001 年(p_4)，'1101 年(p_2)．さらに 100 年後の年は Y を超えるので数えない．同じく 40 年後，20 年後の年は Y を超えるので，次は 8 年後の年を数える．3 日後の曜日部分p_5を押さえて，'1109 年(p_5)．さらに 8 年後の年は Y を超えるから数えない．同じく 4 年後の年は Y を超えるから，次は 1 年ずつ数える．1 日後の曜日部分p_6を押さえて'1110 年(p_6)，同じく'1111 年(p_7)．これで Y 年 1 月 1 日の曜日が分かった.



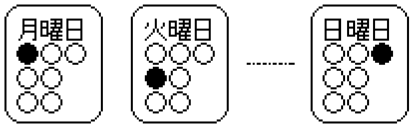
次に月を数える．1 月(p_7)．これで Y 年 M 月 1 日の曜日が分かった.



最後に日を数える．1 日(p_7)．これで Y 年 M 月 D 日の曜日が分かった.

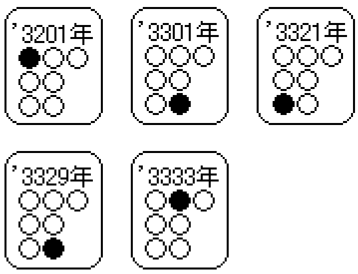


後はその位置までp_1から曜日を数えたら終り．月曜日(p_1)，火曜日(p_2)，・・・，日曜日(p_7)．よって'1111 年 1 月 1 日は日曜日．



例題 4. '3333 年 3 月 3 日

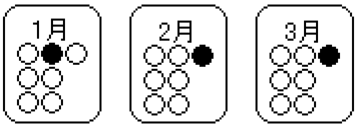
まず年を数える．Y 以下で最大の 400 で割ると 1 余る年は'3201 年だから，p_1を押さえて'3201 年(p_1). 次に 100 年ずつ数える. 5 日後の曜日部分p_6を押さえて, '3301 年(p_6). さらに 100 年後の年は Y を超えるので数えない．同じく 40 年後の年は Y を超えるので，次は 20 年ずつ数える．4 日後の曜日部分p_3を押さえて，'3321 年(p_3)．さらに 8 年ずつ'3329 年(p_6)，4 年ずつ'3333 年(p_4)と，Y 年 1 月 1 日の曜日が分かった．



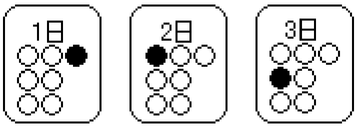
次に月を数える．まず Y 年が平年か閏年かを判断する．'3333 年は平年．次に 1 月(p_4)から 1 月ずつ数える．2 月 1 日は 1 月 1 日の 31 日後だから 3 日後の曜日部分p_7を押さ

指で数えて曜日を当てる方法

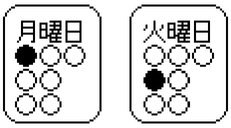
えて, 2 月(p_7). 平年の場合 3 月 1 日は 2 月 1 日の 28 日後だから, 0 日後の曜日部分p_7を押さえて 3 月(p_7). これで Y 年 M 月 1 日の曜日が分かった.



最後に日を数える. 1 日(p_7)から 1 日ずつ数えて 2 日(p_1), 3 日(p_2). これで Y 年 M 月 D 日の曜日が分かった.

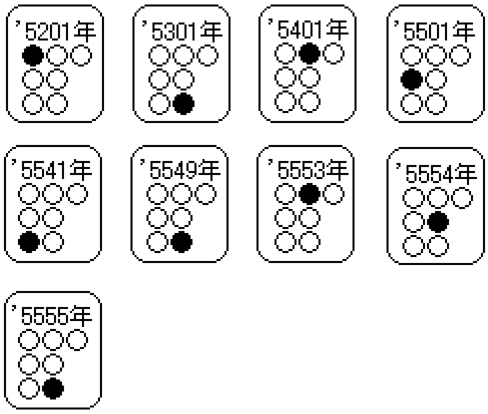


後はその位置までp_1から曜日を数えて終り. 月曜日(p_1), 火曜日(p_2). よって'3333 年 3 月 3 日は火曜日.

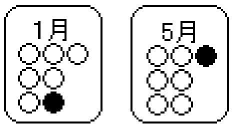


例題 5.　'5555 年 5 月 5 日

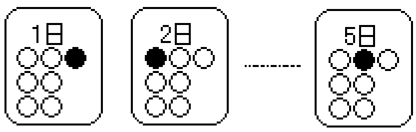
まず年を数える. '5201 年(p_1)から, 100 年ずつ'5301 年(p_6), '5401 年(p_4), '5501 年(p_2), 40 年ずつ'5541 年(p_3)，8 年ずつ'5549 年(p_6)，4 年ずつ'5553 年(p_4)，1 年ずつ'5554 年(p_5)，'5555 年(p_6).



次に月を数える．1 月(p_6)，5 月(p_7).

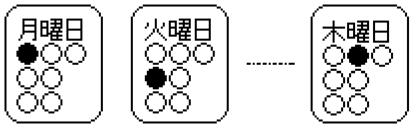


最後に日を数える．1 日(p_7)，2 日(p_1)，・・・，5 日(p_4).



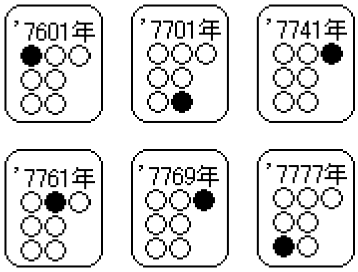
後はその位置までp_1から曜日を数えて終り．月曜日(p_1)，火曜日(p_2)，・・・，木曜日(p_4)．よって'5555 年 5 月 5 日は木曜日.

指で数えて曜日を当てる方法

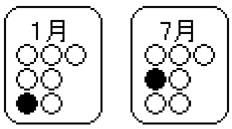


例題 6.　'7777 年 7 月 7 日

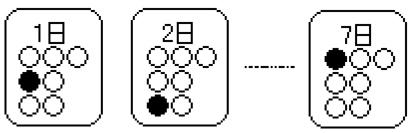
まず年を数える．'7601 年(p_1)から，100 年ずつ'7701 年(p_6)，　40 年ずつ'7741 年(p_7)，20 年ずつ'7761 年(p_4)，8 年ずつ'7769 年(p_7)，'7777 年(p_3).



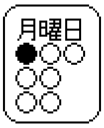
次に月を数える．1 月(p_3)，7 月(p_2).



最後に日を数える．1 日(p_2)，2 日(p_3)，・・・，7 日(p_1).

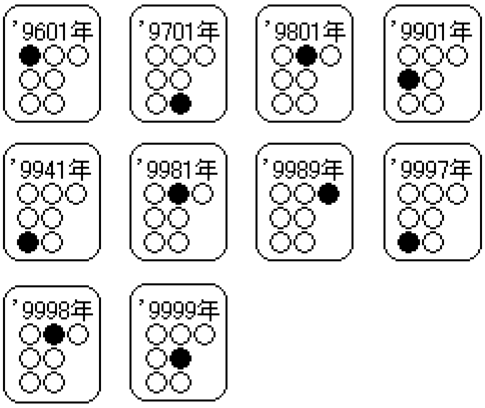


後はその位置までp_1から曜日を数えて終り．月曜日(p_1)．よって’7777 年 7 月 7 日は月曜日．



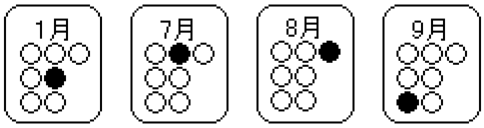
例題 7.　’9999 年 9 月 9 日

まず年を数える．’9601 年(p_1)から, 100 年ずつ’9701 年(p_6), ’9801 年(p_4), ’9901 年(p_2), 40 年ずつ’9941 年(p_3)，’9981 年(p_4)，8 年ずつ’9989 年(p_7)，’9997 年(p_3)，1 年ずつ’9998 年(p_4)，’9999 年(p_5).

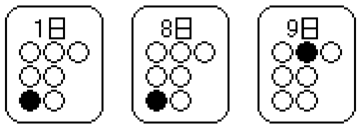


次に月を数える．1 月(p_5)，7 月(p_4)，8 月(p_7)，9 月(p_3).

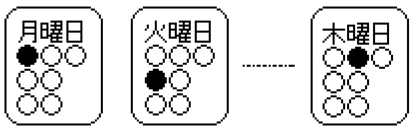
指で数えて曜日を当てる方法



最後に日を数える．1 日(p_3)，8 日(p_3)，9 日(p_4)．



後はその位置までp_1から曜日を数えて終り．月曜日(p_1)，火曜日(p_2)，・・・，木曜日(p_4)．よって’9999 年 9 月 9 日は木曜日．



付録

新しい方法の証明

西暦 1601 年 1 月 1 日以降の任意の日付 Y 年 M 月 D 日に対して，新しい方法を使って正しく曜日を求められることを証明します．また，そのときカウント回数がある正整数を超えないことを証明します. ただし序文で述べた最大値については考慮していない点に注意してください．以下では年を数えて Y 年 1 月 1 日の曜日を求める手続きのみを検証します.

証明：

西暦では，任意の a 年 1 月 1 日，ただし$1601 \leq a$について，

1）a が 4 で割り切れないなら，a 年 1 月 1 日の 1 年後と 1 日後は同じ曜日.
2）$a, a+1, a+2, a+3$がどれも 100 で割り切れないなら, a 年 1 月 1 日の 4 年後と 5 日後は同じ曜日.
3）$a, a+1, a+2, \cdots, a+7$がどれも 100 で割り切れないなら, a 年 1 月 1 日の 8 年後と 3 日後は同じ曜日.
4）$a, a+1, a+2, \cdots, a+19$がどれも 100 で割り切れないなら，a 年 1 月 1 日の 20 年後と 4 日後は同じ曜日.
5）$a, a+1, a+2, \cdots, a+39$がどれも 100 で割り切れないなら，a 年 1 月 1 日の 40 年後と 1 日後は同じ曜日.
6）$a, a+1, a+2, \cdots, a+99$がどれも 400 で割り切れないなら, a 年 1 月 1 日の 100 年後と 5 日後は同じ曜日.
7）a 年 1 月 1 日の 400 年後と 0 日後は同じ曜日.

という事実を使うので，例えば 6)について検証する．$a, a+1, a+2, \cdots, a+99$（連続する 100 個の整数）のうち，25 個は 4 で割り切れて，残りの 75 個は 4 で割り切れない. 4 で割り切れる 25 個のうち 1 つは 100 で割り切れて，残りの 24 個は 100 で割り切れない．100 で割り切れる 1 つは，仮定により 400 で割り切れない．1601 年以降の各年は,

1. 4 で割り切れないなら平年.
2. 4 で割り切れて 100 で割り切れないなら閏年.
3. 100 で割り切れて 400 で割り切れないなら平年.
4. 400 で割り切れるなら閏年.

だった．よって a 年から$a+99$年までの各年のうち，75 個は 4 で割り切れないので平年，24 個は 4 で割り切れて 100 で割り切れないので閏年，残りの 1 つは 100 で割り切れて 400 で割り切れないので平年ということになる. a 年 1 月 1 日からその 100 年後，つまり$a+100$年 1 月 1 日までの経過日数は, a 年から$a+99$年までの各年の日数を合計したものと等しい.

$$365\cdot 75+366\cdot 24+365\cdot 1=365\cdot 100+24=36524$$

なので，$a+100$年 1 月 1 日は a 年 1 月 1 日の36524日後である．36524 は 7 で割ると 5 余るから，36524日後は 5 日後と同じ曜日になる．よって 6)は正しい.

では，与えられた日付を Y 年 M 月 D 日，ただし$1601\le Y$とする．$1601\le Y$なので両辺から1601を引いて$0\le Y-1601$を得る．$Y-1601$について，

$$Y-1601=400q_1+r_1,\qquad 0\le r_1<400$$

$$r_1=100q_2+r_2,\qquad 0\le r_2<100$$

$$r_2=40q_3+r_3,\qquad 0\le r_3<40$$

$$r_3=20q_4+r_4,\qquad 0\le r_4<20$$

$$r_4=8q_5+r_5,\qquad 0\le r_5<8$$

$$r_5=4q_6+r_6,\qquad 0\le r_6<4$$

$$r_6=1q_7+r_7,\qquad 0\le r_7<1$$

である整数q_i, r_i，$i=1,2,\cdots,7$が 1 通りに決まる．このとき

$$0\le q_1$$

$$0\le q_2\le 3$$

$$0 \leq q_3 \leq 2$$

$$0 \leq q_4 \leq 1$$

$$0 \leq q_5 \leq 2$$

$$0 \leq q_6 \leq 1$$

$$0 \leq q_7 \leq 3$$

が成り立つ．そこで$1601 + 400q_1$について考えると，$1601 + 400q_1$は 400 で割ると 1 余る．かつ

$$1601 + 400q_1 \leq Y < 1601 + 400(q_1 + 1)$$

だから，Step2 では$1601 + 400q_1$がカウントされる．西暦では，任意の a 年 1 月 1 日，ただし$1601 \leq a$について，a 年 1 月 1 日の 400 年後と 0 日後は同じ曜日になるので，1601 年 1 月 1 日と$1601 + 400q_1$年 1 月 1 日は同じ曜日になる．1601 年 1 月 1 日は月曜日なので，よって$1601 + 400q_1$年 1 月 1 日は月曜日になる．

Step2 では最後に$1601 + 400q_1$がカウントされた．$\alpha_1 = 1601 + 400q_1$とする．

$$\alpha_1 + 100q_2 \leq Y < \alpha_1 + 100(q_2 + 1)$$

なので，$q_2 = 0$のときは$Y < \alpha_1 + 100$となり Step3 ではカウントされない．$1 \leq q_2$のときは

1. $0 \leq i < q_2$であるすべての整数iについて，$\alpha_1 + 100(i + 1) \leq Y$.
2. $i = q_2$のときは$Y < \alpha_1 + 100(i + 1)$.

だから，Step3 では$0 \leq i < q_2$であるすべての整数iについて，$\alpha_1 + 100(i + 1)$がカウントされる．このとき$\alpha_1 + 100i \leq x < \alpha_1 + 100(i + 1)$である任意の整数を x とする．

$$\alpha_1 \leq \alpha_1 + 100i \leq x < \alpha_1 + 100(i + 1) \leq Y \leq \alpha_1 + 399$$

かつα_1は 400 で割ると 1 余る．よって x は 400 で割り切れない．西暦では，任意の a 年 1 月 1 日，ただし$1601 \leq a$について，a 年 1 月 1 日の 100 年後と 5 日後が同じ曜日になるために十分な条件は，$a, a + 1, a + 2, \cdots, a + 99$がどれも 400 で割り切れないこと

だから，$\alpha_1+100\mathrm{i}$年 1 月 1 日の 100 年後と 5 日後は同じ曜日になる．以上から，Step3 では新たにq_2回カウントされて，Step2 から Step3 まででは最後に$\alpha_1+100\mathrm{q}_2$がカウントされる．

Step2 から Step3 まででは最後に$\alpha_1+100\mathrm{q}_2$がカウントされた．$\alpha_2=\alpha_1+100\mathrm{q}_2$とする．

$$\alpha_2+40\mathrm{q}_3\leq \mathrm{Y}<\alpha_2+40(\mathrm{q}_3+1)$$

なので，$\mathrm{q}_3=0$のときは$\mathrm{Y}<\alpha_2+40$となり Step4 ではカウントされない．$1\leq \mathrm{q}_3$のときは

1. $0\leq \mathrm{i}<\mathrm{q}_3$であるすべての整数$\mathrm{i}$について，$\alpha_2+40(\mathrm{i}+1)\leq \mathrm{Y}$.
2. $\mathrm{i}=\mathrm{q}_3$のときは$\mathrm{Y}<\alpha_2+40(\mathrm{i}+1)$.

だから，Step4 では$0\leq \mathrm{i}<\mathrm{q}_3$であるすべての整数$\mathrm{i}$について，$\alpha_2+40(\mathrm{i}+1)$がカウントされる．このとき$\alpha_2+40\mathrm{i}\leq \mathrm{x}<\alpha_2+40(\mathrm{i}+1)$である任意の整数を x とする．

$$\alpha_2\leq\alpha_2+40\mathrm{i}\leq \mathrm{x}<\alpha_2+40(\mathrm{i}+1)\leq \mathrm{Y}\leq\alpha_2+99$$

かつα_2は 100 で割ると 1 余る．よって x は 100 で割り切れない．西暦では，任意の a 年 1 月 1 日，ただし$1601\leq \mathrm{a}$について，a 年 1 月 1 日の 40 年後と 1 日後が同じ曜日になるために十分な条件は，$\mathrm{a},\mathrm{a}+1,\mathrm{a}+2,\cdots,\mathrm{a}+39$がどれも 100 で割り切れないことだから，$\alpha_2+40\mathrm{i}$年 1 月 1 日の 40 年後と 1 日後は同じ曜日になる．以上から，Step4 では新たにq_3回カウントされて，Step2 から Step4 まででは最後に$\alpha_2+40\mathrm{q}_3$がカウントされる．

Step2 から Step4 まででは最後に$\alpha_2+40\mathrm{q}_3$がカウントされた．$\alpha_3=\alpha_2+40\mathrm{q}_3$とする．

$$\alpha_3+20\mathrm{q}_4\leq \mathrm{Y}<\alpha_3+20(\mathrm{q}_4+1)$$

なので，$\mathrm{q}_4=0$のときは$\mathrm{Y}<\alpha_3+20$となり Step5 ではカウントされない．$1\leq \mathrm{q}_4$のときは

1. $0\leq \mathrm{i}<\mathrm{q}_4$であるすべての整数$\mathrm{i}$について，$\alpha_3+20(\mathrm{i}+1)\leq \mathrm{Y}$.
2. $\mathrm{i}=\mathrm{q}_4$のときは$\mathrm{Y}<\alpha_3+20(\mathrm{i}+1)$.

だから，Step5 では$0 \leq \mathrm{i} < \mathrm{q}_4$であるすべての整数iについて，$\alpha_3 + 20(\mathrm{i}+1)$がカウントされる．このとき$\alpha_3 + 20\mathrm{i} \leq \mathrm{x} < \alpha_3 + 20(\mathrm{i}+1)$である任意の整数を x とする．

$$\alpha_2 \leq \alpha_3 + 20\mathrm{i} \leq \mathrm{x} < \alpha_3 + 20(\mathrm{i}+1) \leq \mathrm{Y} \leq \alpha_2 + 99$$

かつα_2は 100 で割ると 1 余る．よって x は 100 で割り切れない．西暦では，任意の a 年 1 月 1 日，ただし$1601 \leq \mathrm{a}$について，a 年 1 月 1 日の 20 年後と 4 日後が同じ曜日になるために十分な条件は，$\mathrm{a}, \mathrm{a}+1, \mathrm{a}+2, \cdots, \mathrm{a}+19$がどれも 100 で割り切れないことだから，$\alpha_3 + 20\mathrm{i}$年 1 月 1 日の 20 年後と 4 日後は同じ曜日になる．以上から，Step5 では新たにq_4回カウントされて，Step2 から Step5 まででは最後に$\alpha_3 + 20\mathrm{q}_4$がカウントされる．

Step2 から Step5 まででは最後に$\alpha_3 + 20\mathrm{q}_4$がカウントされた．$\alpha_4 = \alpha_3 + 20\mathrm{q}_4$とする．

$$\alpha_4 + 8\mathrm{q}_5 \leq \mathrm{Y} < \alpha_4 + 8(\mathrm{q}_5 + 1)$$

なので，$\mathrm{q}_5 = 0$のときは$\mathrm{Y} < \alpha_4 + 8$となり Step6 ではカウントされない．$1 \leq \mathrm{q}_5$のときは

1. $0 \leq \mathrm{i} < \mathrm{q}_5$であるすべての整数iについて，$\alpha_4 + 8(\mathrm{i}+1) \leq \mathrm{Y}$.
2. $\mathrm{i} = \mathrm{q}_5$のときは$\mathrm{Y} < \alpha_4 + 8(\mathrm{i}+1)$.

だから，Step6 では$0 \leq \mathrm{i} < \mathrm{q}_5$であるすべての整数iについて，$\alpha_4 + 8(\mathrm{i}+1)$がカウントされる．このとき$\alpha_4 + 8\mathrm{i} \leq \mathrm{x} < \alpha_4 + 8(\mathrm{i}+1)$である任意の整数を x とする．

$$\alpha_2 \leq \alpha_4 + 8\mathrm{i} \leq \mathrm{x} < \alpha_4 + 8(\mathrm{i}+1) \leq \mathrm{Y} \leq \alpha_2 + 99$$

かつα_2は 100 で割ると 1 余る．よって x は 100 で割り切れない．西暦では，任意の a 年 1 月 1 日，ただし$1601 \leq \mathrm{a}$について，a 年 1 月 1 日の 8 年後と 3 日後が同じ曜日になるために十分な条件は，$\mathrm{a}, \mathrm{a}+1, \mathrm{a}+2, \cdots, \mathrm{a}+7$がどれも 100 で割り切れないことだから，$\alpha_4 + 8\mathrm{i}$年 1 月 1 日の 8 年後と 3 日後は同じ曜日になる．以上から，Step6 では新たにq_5回カウントされて，Step2 から Step6 まででは最後に$\alpha_4 + 8\mathrm{q}_5$がカウントされる．

Step2 から Step6 まででは最後に$\alpha_4 + 8\mathrm{q}_5$がカウントされた．$\alpha_5 = \alpha_4 + 8\mathrm{q}_5$とする．

$$\alpha_5 + 4\mathrm{q}_6 \leq \mathrm{Y} < \alpha_5 + 4(\mathrm{q}_6 + 1)$$

なので，$q_6 = 0$のときは$Y < \alpha_5 + 4$となり Step7 ではカウントされない．$1 \le q_6$のときは

1. $0 \le i < q_6$であるすべての整数iについて，$\alpha_5 + 4(i+1) \le Y$.
2. $i = q_6$のときは$Y < \alpha_5 + 4(i+1)$.

だから，Step7 では$0 \le i < q_6$であるすべての整数iについて，$\alpha_5 + 4(i+1)$がカウントされる．このとき$\alpha_5 + 4i \le x < \alpha_5 + 4(i+1)$である任意の整数を x とする．

$$\alpha_2 \le \alpha_5 + 4i \le x < \alpha_5 + 4(i+1) \le Y \le \alpha_2 + 99$$

かつα_2は 100 で割ると 1 余る．よって x は 100 で割り切れない．西暦では，任意の a 年 1 月 1 日，ただし$1601 \le a$について，a 年 1 月 1 日の 4 年後と 5 日後が同じ曜日になるために十分な条件は，$a, a+1, a+2, a+3$がどれも 100 で割り切れないことだから，$\alpha_5 + 4i$年 1 月 1 日の 4 年後と 5 日後は同じ曜日になる. 以上から, Step7 では新たにq_6回カウントされて，Step2 から Step7 までででは最後に$\alpha_5 + 4q_6$がカウントされる．

Step2 から Step7 まででは最後に$\alpha_5 + 4q_6$がカウントされた．$\alpha_6 = \alpha_5 + 4q_6$とする．

$$\alpha_6 + 1q_7 \le Y < \alpha_6 + 1(q_7 + 1)$$

なので，$q_7 = 0$のときは$Y < \alpha_6 + 1$となり Step8 ではカウントされない．$1 \le q_7$のときは

1. $0 \le i < q_7$であるすべての整数iについて，$\alpha_6 + 1(i+1) \le Y$.
2. $i = q_7$のときは$Y < \alpha_6 + 1(i+1)$.

だから，Step8 では$0 \le i < q_7$であるすべての整数iについて，$\alpha_6 + 1(i+1)$がカウントされる．このとき$\alpha_6 + 1i \le x < \alpha_6 + 1(i+1)$である任意の整数を x とする．

$$\alpha_6 \le \alpha_6 + 1i \le x < \alpha_6 + 1(i+1) \le Y \le \alpha_6 + 3$$

かつα_6は 4 で割ると 1 余る．よって x は 4 で割り切れない．西暦では，任意の a 年 1 月 1 日，ただし$1601 \le a$について，a 年 1 月 1 日の 1 年後と 1 日後が同じ曜日になるために十分な条件は，a が 4 で割り切れないことだから，$\alpha_6 + 1i$年 1 月 1 日の 1 年後と 1 日後は同じ曜日になる．以上から，Step8 では新たにq_7回カウントされて，Step2 から Step8 まででは最後に$\alpha_6 + 1q_7$がカウントされる．$Y = \alpha_6 + 1q_7$なので，年を数えて Y

年 1 月 1 日の曜日を求める手続きは終了した．Step2 から Step8 までのカウント回数の合計を c とすると$c = 1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_7$である．

$$0 \leq q_2 \leq 3$$

$$0 \leq q_3 \leq 2$$

$$0 \leq q_4 \leq 1$$

$$0 \leq q_5 \leq 2$$

$$0 \leq q_6 \leq 1$$

$$0 \leq q_7 \leq 3$$

だから $0 \leq q_2 + q_3 + \cdots + q_7 \leq 12$．各辺に 1 を足し，よって$1 \leq c \leq 13$が分かった．

(証明終わり)